Heinrich Bürger

ARGUMENTIEREN IM MATHEMATIKUNTERRICHT

1. Ein Beispiel für unterschiedliche Schüleraktivitäten zu einem Thema des Mathematikunterrichts

In die Lehrpläne für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen von 1967 wurde erstmals die Behandlung von Vektoren aufgenommen; seither ist auch die Parameterdarstellung einer Geraden ein Thema des Mathematikunterrichts. Spezielle Lernziele zu diesem Thema sind in den Lehrplänen bisher nicht angeführt. Aus Lehrbüchern kann geschlossen werden, daß die Schüler hauptsächlich Parameterdarstellungen von Geraden, die auf verschiedene Weise gegeben sein können, ermitteln sollen und Parameterdarstellungen zum Lösen von geometrischen Problemen, beispielsweise zum Berechnen von Schnittpunkten, verwenden.

Diese Tätigkeiten des Ermittelns und Anwendens können als spezielle Ausprägungen des Verständnisses für die Parameterdarstellung einer Geraden angesehen werden. Es stellt sich die Frage, ob das Verständnis auf diese Formen beschränkt bleiben soll oder ob nicht ein erweitertes Verständnis im Unterricht angestrebt werden soll, das etwa beim Bearbeiten der folgenden Aufgabe nachgewiesen werden kann.

<u>C1</u> Die Parameterdarstellung der Geraden g durch die Punkte $A = \binom{0}{3}$ und $B = \binom{2}{4}$ ist $X = \binom{0}{3} + t.\binom{2}{1}$.

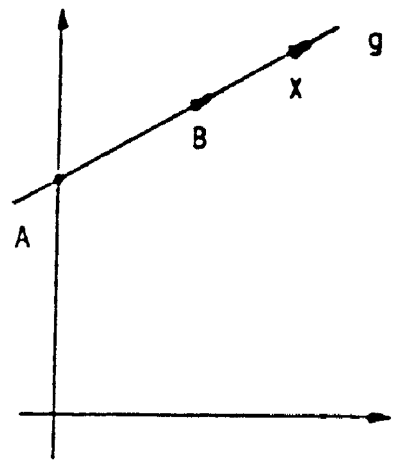
a) Beschreibe den Zusammenhang zwischen dieser Parameterdarstellung und der Geraden g. (Inwiefern wird die Gerade g durch diese Parameterdarstellung erfaßt?)

b) Begründe die in a) gemachte Aussage.

<u>Lösung</u>:

a) Für jede reelle Zahl t erhält man einen Punkt X von g (genauer: die Koordinaten eines Punktes X).
Ist umgekehrt X ein Punkt von g, dann gibt es eine reelle Zahl t, sodaß $X = \binom{0}{3} + t.\binom{2}{1}$.

b) Mit $\overrightarrow{AB} = B-A$ gilt: $X = A + t.\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AX} = t.\overrightarrow{AB}$.
Daraus erkennt man:
Für jede reelle Zahl t sind die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AX}$ parallel; da sie den gleichen Anfangspunkt A haben, liegen A,B,X auf einer Geraden, also liegt X auf g.
Ist umgekehrt X ein Punkt von g, dann liegen A,B,X auf einer Geraden und es gibt eine reelle Zahl t, sodaß $\overrightarrow{AX} = t.\overrightarrow{AB}$.



Bei dieser Aufgabe stehen nicht das Rechnen, das Einsetzen in Formeln oder das Anwenden von Verfahren (wie z.B. das Lösen einer Gleichung) im Vordergrund. Vielmehr müssen Schüler, die diese Aufgabe bearbeiten, Zusammenhänge beschreiben, argumentieren und logisch präzise arbeiten (Unterscheiden zwischen einem Schluß und dessen Umkehrschluß).

Diese Tätigkeiten sind spezielle Formen der in der Bildungs- und Lehraufgabe der Mathematiklehrpläne von 1985 angeführten mathematischen Grundtätigkeiten "Darstellen und Interpretieren" sowie "Argumentieren und exaktes Arbeiten", die allgemeine Lernziele festlegen. Aufgabe 01 kann somit als ein Beitrag zu diesen Zielsetzungen angesehen werden.

Ähnlich wie hier am Beispiel der Parameterdarstellung gezeigt wurde, können bei fast allen Themen des Mathematikunterrichts durch entsprechende Aufgabenstellungen recht unterschiedliche Tätigkeiten der Schüler zu verschiedenen allgemeinen Lernzielen initiiert werden. Doch ergibt sich vorerst die Frage: Welche Gründe sprechen dafür, diese Ziele zu verfolgen? Diese Frage soll im folgenden für das Argumentieren im Mathematikunterricht untersucht werden.

2. Warum sollen die Schüler im Mathematikunterricht argumentieren

2.1 Argumentieren kann Verständnis fördern

Einen Sachverhalt, insbesonders einen Begriff, zu verstehen, kann u.a. bedeuten:
- ihn in verschiedenen Formen darstellen bzw. beschreiben können,
- Beispiele, Gegenbeispiele angeben können, Analogien aufzeigen können,
- ihn anwenden können,
- Beziehungen zu anderen Sachverhalten (Begriffen) herstellen können.

Verständnis für einen Sachverhalt kann sich in der Fähigkeit äußern, verschiedene Tätigkeiten in Bezug auf diesen Begriff durchführen zu können. Jede dieser Tätigkeiten kann als eine Form des Verständnisses angesehen werden (Bürger 1987).

Für das Argumentieren ist kennzeichnend, daß Beziehungen zwischen Sachverhalten hergestellt werden. Beispielsweise werden in der Begründung der Aufgabe 01 b) Beziehungen zwischen der Parameterdarstellung $X = A + t.\overrightarrow{AB}$ und geometrischen Begriffen (Pfeile, Punkte, Geraden) und Aussagen über diese Begriffe hergestellt. Bei Argumentationen können auf unterschiedliche Weise Beziehungen der zu begründenden Situation mit anderen Sachverhalten hergestellt werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

<u>02</u> Begründe $a-b-c = a-(b+c)$

a) durch Darstellung mit Strecken,
b) durch einen dazu passenden Text,
c) durch Rückführen auf Additionen und Rechengesetze für die Addition.

<u>Lösung</u>:

b) Aus einem Autobus mit a Fahrgästen steigen zuerst b Personen und dann c Personen aus. Die Zahl der verbleibenden Fahrgäste bleibt die gleiche, wenn gleichzeitig (b+c) Personen aussteigen.

c) $x = (a-b)-c \Leftrightarrow c+x = a-b \Leftrightarrow b+(c+x) = a \Leftrightarrow (b+c)+x = a \Leftrightarrow x = a-(b+c)$

In dieser Aufgabe wird die betrachtete Formel in a) mit einer geometrischen Situation, in b) mit einer außermathematischen Situation, in c) mit Rechenregeln in Beziehung gesetzt.

Dieses Beispiel zeigt auch, daß für die betrachtete Formel verschiedene Formen des Verständnisses bestehen können. Je mehr Formen von Verständnis ein Schüler nachweisen kann, umso tiefer kann sein Verständnis bezeichnet werden.
Begründungen können auch als Erklärungen angesehen werden, vor allem dann, wenn Beziehungen zu vertrauten Vorstellungen hergestellt werden,

wie dies in 02 a) und b) geschehen soll. In der folgenden Aufgabe soll die Division durch eine Bruchzahl durch Deuten des Dividierens als "Enthaltensein" erklärt werden.

03 Warum gilt $3:\frac{1}{2} = 6$? Warum gilt $a:\frac{1}{n} = a.n$?
Lösung: $3:\frac{1}{2} = z$ bedeutet: $\frac{1}{2}.z = 3$. Nun ist $\frac{1}{2}.6 = 3$, also $z = 3:\frac{1}{2} = 6$.

Üblicherweise werden solche Erklärungen durch den Lehrer gegeben; u.U. bewirkt dies bei Schülern nur eine bloße passive Kenntnisnahme. Falls Schüler selbst durch entsprechende Aufgabenstellungen solche Begründungen durchführen und damit Beziehungen herstellen müssen, kann diese aktive Auseinandersetzung zumindest zu einem gefestigterem Verständnis führen.

Bemerkung: Viele Sachverhalte versteht man oft besser, wenn man sie selbst unterrichtet bzw. jemandem erklärt hat. Die Aufgabe an Schüler, anderen Schülern einen Sachverhalt zu erklären, kann so zu einem Lerngewinn auch für den Erklärenden werden.

2.2 Argumentieren kann zu überlegtem Arbeiten führen

Wenn Schüler Handlungen begründen sollen, insbesondere im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Aufgaben, so sind sie gezwungen, Zusammenhänge und Beziehungen zu durchdenken, Überlegungen zu präzisieren und darzustellen, wodurch diese Überlegungen stärker ins Bewußtsein rücken. Wenn man solche Begründungen immer wieder verlangt, kann man hoffen, daß Schüler beim Bearbeiten von Aufgaben die dazu erforderlichen Überlegungen - auch ohne Verlangen nach Begründung - bewußter durchführen. Dadurch können gegebenenfalls Fehler vermieden werden.

04 Eine Klasse mit 32 Schülern unternimmt eine Autobusfahrt zum Preis von 1000 S. Aus der Klassenkasse werden 200 S beigesteuert. Wieviel zahlt jeder Schüler? Welche Rechenoperationen mußt du ausführen? Warum?

05 Das Doppelte einer Zahl ist um 3 größer als die Zahl selbst. Beschreibe diesen Sachverhalt durch eine Gleichung. Begründe!

Insbesondere in der Algebra können solche Begründungen helfen, Fehler zu vermeiden.

06 kürze $\frac{x^2+3x}{2x}$ und begründe das Vorgehen durch die Kürzungsregel $\frac{A.C}{B.C} = \frac{A}{B}$. (Gib dabei an, welche Ausdrücke A,B,C entsprechen.)

Die Forderung nach Begründung zwingt zu einer Konzentration auf die Rechenstruktur von Zähler und Nenner und nötigt zu einer Umformung des Zählers auf die Form A.C. (Voraussetzung für eine erfolgreiche Bearbeitung ist, daß die Schüler gelernt haben, Rechen- bzw. Termstrukturen zu analysieren.)
Das Begründen bei diesen Aufgaben kann als ein Offenlegen von Gedanken aufgefaßt werden und kann zum Absichern oder als Kontrolle von Tätigkeiten dienen.

2.3 Argumentieren ist eine für die Mathematik charakteristische Tätigkeit.

Ein zentrales Anliegen in der Mathematik ist die Absicherung mathematischer Aussagen und Handlungen durch Begründungen. Dies führt zur Entwicklung von Theorien, die deduktive Begründungen ermöglichen. Die Vermittlung eines Bildes der Mathematik, in dem auf diesen theoretischen Aspekt verzichtet wird, liefert ein einseitiges Bild dieser Wissenschaft. Schüler, die keine Fähigkeiten im Argumentieren in mathematischen Bereichen erwerben, sind in einer mathematischen Grundtätigkeit nicht ausgebildet.

2.4 Argumentieren ist eine allgemeine geistige Tätigkeit, die für viele Lebens- und Wissensbereiche bedeutungsvoll sein kann.

Dementsprechend ist ein allgemeines Lernziel der allgemeinbildenden höheren Schule und der Hauptschule, daß die Schüler Fähigkeiten im Argumentieren erwerben sollen.

Argumentieren kann in verschiedenen Wissensbereichen in unterschiedlichen Formen erfolgen. So ist auch das Argumentieren in der Mathematik in sehr spezifischer Form ausgeprägt, wobei deduktives Schließen verbunden mit Klären von Voraussetzungen und Präzisieren von Sachverhalten vorherrschen. Ein Übertragen dieser Arbeitsweise kann auch in anderen Bereichen wertvoll sein.

Im Mathematikunterricht bestehen vielfältige Möglichkeiten für die

Schüler, Argumentationen durchzuführen und damit entsprechende Fähigkeiten zu erwerben. Im Hinblick auf eine Anwendung dieser Fähigkeiten in anderen Bereichen, sollten im Unterricht auch Grenzen der in der Mathematik üblichen Formen des Argumentierens und Unterschiede gegenüber Argumentationsformen in anderen Bereichen aufgezeigt werden.

Zu bemerken ist, daß auch im Mathematikunterricht Gelegenheiten für Argumentationen bestehen, die sich von zwingenden mathematischen Argumentationen unterscheiden.Dazu gehören etwa Begündungen für die Verwendung eines bestimmten mathematischen Modells in Anwendungssituationen (z.B.: Warum werden in einem graphischen Fahrplan ungleichförmige Bewegungen von Zügen als gleichförmige Bewegung dargestellt?) oder Begründungen für die Behandlung bzw. Bedeutung einzelner Themen des Mathematikunterrichts.

2.5 Die Bedeutung mathematischer Tätigkeiten und Qualifikationen ändert sich wegen der Verwendungsmöglichkeiten elektronischer Rechengeräte

Taschenrechner schaffen die Möglichkeit, umfangreiche numerische Rechnungen rascher und sicherer auszuführen, als es durch die üblichen schriftlichen Rechenverfahren erfolgen kann. Damit verliert die Fähigkeit, langwierige Rechnungen auszuführen, an Bedeutung, im Gegensatz zu Fähigkeiten im Kopfrechen und Abschätzen. Neuere Rechengeräte sind auch imstande, Umformungen algebraischer Terme und Formeln, Lösungen von Gleichungen sowie Differentiationen und Integrationen durchzuführen. Allgemein kann das Durchführen langwieriger, komplexer oder aufwendiger Verfahren Maschinen überlassen werden. (Die Beherrschung einfacher Verfahren und Techniken in der Algebra und Analysis ist allerdings - ähnlich wie das Kopfrechnen - weiterhin eine Voraussetzung für verschiedene mathematische Tätigkeiten und gleichzeitig eine wichtige Form des Verständnisses. Darüber hinaus können einfache Operationen ohne Verwendung von Maschinen oft rascher durchgeführt werden.)

In dem Maße, in dem das Durchführen von Verfahren an Bedeutung verliert und daher im Unterricht eingeschränkt werden kann, gewinnen andere grundlegende mathematische Fähigkeiten (Fähigkeiten im Problemlösen, im Darstellen und Interpretieren und im Argumentieren), die Maschinen nicht oder nur in eingeschränktem Maße zugesprochen werden können, an Bedeutung und können im Unterricht intensiver entwickelt werden.

Bemerkung: Die oben angeführten Gründe für das Argumentieren im Mathematikunterricht sollten auch mit den Schülern erörtert werden. Dadurch kann eine Motivation der Schüler erfolgen.

3. Argumentationsbasis

Wie Aufgabe 02, in der die Begründung der Formel a-b-c = a-(b+c) verlangt wird, zeigt, kann die Begründung einer Aussage auf verschiedene Weisen bzw. mit verschiedenen Argumenten erfolgen. Auch die Art, wie aus den verwendeten Argumenten auf die zu begründende Aussage geschlossen wird, kann verschieden sein. Die Begündung 02 c) ist deduktiv, aus Rechengesetzen werden allgemeingültige Folgerungen gezogen. Dies trifft für die Argumentation in 02 b) nicht zu, schon allein deshalb nicht, weil Autobusse nur eine begrenzte Zahl von Fahrgästen aufnehmen können, die Formel a-b-c = ... jedoch (zumindest) für alle natürlichen Zahlen gelten soll.

Jene Aussagen (Annahmen), die als richtig angesehen und für eine Begründung herangezogen werden, sowie die Art des Schließens, mit der aus diesen Aussagen Folgerungen gezogen werden, bilden die Argumentationsbasis einer Begründung (Bürger 1979).
Ein weiteres Beispiel soll zeigen, wie die Begründung einer Aussage mit verschiedenen Argumentationsbasen erfolgen kann.

07 $\lim\limits_{z \to 3} (2z-1) = 5$ ist zu begründen.

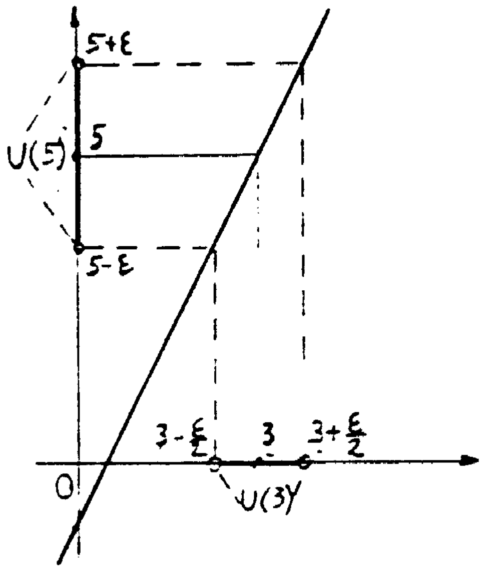
Lösungsmöglichkeiten:

(1) Wenn $z \to 3$ ("z nähert sich unbegrenzt 3"), dann $2.z \to 6$ und $2.z-1 \to 5$. (Die Argumentationsbasis ist hier etwas verschwommen und könnte etwa in folgender formaler Form rekonstruiert werden:

a) $(z \to p) \Rightarrow (k.z \to k.p)$, b) $(z \to p) \Rightarrow (z-c \to p-c)$. Diesen Aussagen liegt ein intuitiver, nicht präzisierter Begriff von "unbegrenzt nähern" zugrunde.)

(2) Rückführen auf die Sätze $\lim_{z \to p} z = p$, $\lim_{z \to p} k.f(z) = k.\lim_{z \to p} f(z)$ und $\lim_{z \to p} (f(z)+c) = (\lim_{z \to p} f(z))+c$ (die die Argumentationsbasis bilden).

(3) Aus der nebenstehenden Zeichnung wird geschlossen:
Zu jeder Umgebung $U(5) =]5-\varepsilon, 5+\varepsilon[$ gibt es eine Umgebung $U(3) =]3-\delta, 3+\delta[$, sodaß gilt:
$\forall z \in U(3): \; f(z) \in U(5)$
(Zur Argumentationsbasis gehört eine entsprechende Grenzwertdefinition sowie die aus der Anschauung entnommene Annahme, daß zu jeder Umgebung U(5) eine passende Umgebung U(3) gefunden werden kann.)



(4) Aus $5-\varepsilon < f(z)=2z-1 < 5+\varepsilon \;\Leftrightarrow\; 3-\frac{\varepsilon}{2} < z < 3+\frac{\varepsilon}{2}$ folgt die in (3) formulierte Aussage. (Neben der Grenzwertdefinition enthält die Argumentationsbasis nun auch Rechengesetze.)

(5) f mit $f(x)=2x-1$ ist eine lineare Funktion; lineare Funktionen sind in $\mathbb{R}$ stetig, daher ist $\lim_{z \to p} f(z) = f(p)$ bzw. $\lim_{z \to 3} (2z-1) = 5$

Jede der angeführten Begründungen entspricht der Aufgabenstellung von 07. Soll eine Begründung in einer bestimmten Form erfolgen - worauf man im Unterricht häufig Wert legen wird - muß den Schülern die Argumentationsbasis vorgegeben werden, etwa durch Formulierungen wie "Begründe unter Verwendung von Sätzen über Grenzwerte" oder "Begründe durch Veranschaulichung der Grenzwertdefinition".

Eine solche zusätzliche Angabe der Argumentationsbasis kann entfallen, wenn den Schülern klar ist, welche Argumentationsbasis sie verwenden sollen, etwa weil sie im Unterricht bereits analoge Aufgaben gelöst haben.

4. Argumentieren und exaktes Arbeiten

Die Lösungen der Aufgabe 07 (und ebenso die Lösungen von 02) unterscheiden sich voneinander auch durch ihre Exaktheit. Beispielsweise ist die Lösung (1), die mit dem nicht klar definierten Begriff "Unbegrenzte Näherung" und mit nicht klar formulierten Sätzen arbeitet, weniger exakt als die Lösung (2) oder die Lösung (4). Exaktere Argumentationen erfordern präziser formulierte Begriffe und Voraussetzungen.

Vielfach entstehen beim Argumentieren bzw. bei mathematischen Tätigkeiten, denen unausgesprochene Argumentationen zugrunde liegen, Probleme, weil Begriffe oder Voraussetzungen nicht exakt genug gefaßt sind.

Ein Beispiel dazu: In einer Unterrichtsstunde sollten Schüler (in Gruppenarbeit) aus Papier ausgeschnittene Vierecke aufgrund ihrer "Form" klassifizieren, indem sie Vierecke "gleicher Form" jeweils in ein Kuvert geben sollten; außerdem sollten sie ihre Entscheidung begründen. Da die Begriffe "Form" bzw. "gleiche Form" nicht weiter präzisiert worden waren (Begriffe wie "Trapez", "Rhombus" u.ä. waren den Schülern nicht bekannt), begründeten die Schüler ihre Entscheidungen beispielsweise durch Feststellungen, daß die Vierecke eines Kuverts "dachförmig" oder "drachenförmig" seien. Bei der Klassifikation ergaben sich gelegentlich Schwierigkeiten, weil die Schüler keine präzisen Kriterien kannten, um entscheiden zu können,ob ein Viereck dachförmig ist oder nicht. Erst eine Exaktifizierung des Begriffes "dachförmig" durch Angabe von eindeutig feststellbaren Eigenschaften (wie z.B. parallele Seiten, gleichlange Seiten, Symmetrieeigenschaften) hätte eindeutige Entscheidungen und korrekte Begründungen ermöglicht.

Daß eine unexakte Argumenationsbasis, die mathematische Tätigkeiten steuert, die Ursache von Fehlern sein kann, kann an Aufgabe 06 demonstriert werden:

Ein falsches Kürzen von $\frac{x^2+3x}{2x}$ zu $\frac{x^2+3}{2}$ könnte durch die unpräzise (oder falsche ?) Regel "Man kann Zähler und Nenner durch den gleichen Faktor kürzen" gerechtfertigt werden. (Vielfach sind solche unpräzisen Regeln die Ursachen für Schülerfehler.)

Diese Überlegungen zeigen beispielhaft den engen Zusammenhang des (für die Mathematik charakteristischen) exakten Arbeitens mit dem Argumentieren auf.

5. Aufgaben zum Argumentieren

Damit die Schüler lernen zu argumentieren und damit sie durch Argumentationen ihr Verständnis vertiefen oder zu überlegtem und exaktem Arbeiten geführt werden, müssen sie das Argumentieren üben und möglichst selbständig Argumentationen durchführen. Dazu müssen den Schülern entsprechende Aufgaben gestellt werden. Solche Aufgaben können gelegentlich vom Lehrer - gegebenenfalls in einem Wechselgespräch mit der Klasse - gelöst werden, um Muster für Lösungen zu demonstrieren. Im allgemeinen sollten diese Aufgaben jedoch von den Schülern in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit möglichst selbständig bearbeitet werden. Dabei ist wesentlich, daß Begründungen, u.U. nach Diskussion, von den Schülern schriftlich fixiert werden.

Damit Argumentieren zu einem "echten" Lernziel wird, wie dies in den Lehrplänen gefordert wird, ist nötig, daß Argumentationsaufgaben auch bei mündlichen und schriftlichen Leistungsfeststellungen gegeben werden, wobei sie selbstverständlich in ähnlicher Weise wie andere Arten von Aufgaben im Unterricht vorbereitet werden müssen.

Die Entwicklung von Fähigkeiten im Argumentieren ist ein langfristiges Ziel. Entsprechende Aufgaben sollten in allen Schulstufen gestellt werden, die Argumentationsbasis sollte dem jeweiligen allgemeinen kognitiven Niveau der Schüler angepaßt werden. Im folgenden werden Aufgaben für verschiedene Schulstufen, beginnend mit der 1. Klasse AHS oder Hauptschule, als

Anregungen vorgestellt. Die jeweilige Argumentationsbasis ist in der Aufgabenstellung angegeben oder ergibt sich aus der Lösung.

08 Welche Formel ist richtig, welche falsch?

$(r - s) + t = r - (s + t)$

$r - (s - t) = (r - s) - t$

$(r - s) - t = r - (s + t)$

Ist eine Formel richtig, so ist sie in einer Zeichnung zu erklären. Ist eine Formel falsch, so ist zu begründen, warum sie falsch ist.

09 Warum ist $3000:15 > 3000:16$?

Variation: $a < b$; begründe: $C:a > C:b$

Lösungsmöglichkeiten:

(1) Dieselbe Zahl, in mehr Teile geteilt, ergibt weniger.

(2) Die kleinere Zahl muß man öfter multiplizieren als die größere, um 3000 zu erhalten.

(3) $C:a = x$ bedeutet $a.x = C$

$C:b = y$ bedeutet $b.y = C$

$$a < b \Leftrightarrow \underbrace{a.x}_{C} < b.x \Leftrightarrow \underbrace{b.y}_{C} < b.x \Leftrightarrow y < x$$

10 Warum kann man den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 8 cm und 5 cm durch die Rechnung 8 . 5 erhalten? (Variation: Seitenlängen u,v)

11 $A = \{5,6,7,8\}$, $\qquad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x < 9\}$

Welche Beziehungen sind richtig, welche falsch:

$A \subseteq B$, $B \subseteq A$, $A \subseteq C$, $C \subseteq A$

Begründe!

12 Gib eine Formel an, die das "Verschieben des Kommas" beim Dividieren von Dezimalzahlen rechtfertigt.

Lösung: $A:B = (10.A):(10.B) = (C.A):(C.B)$

13 Erkläre in einer Zeichnung, warum $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$ ist.

14 $a+2.b = c$; $b = ?$

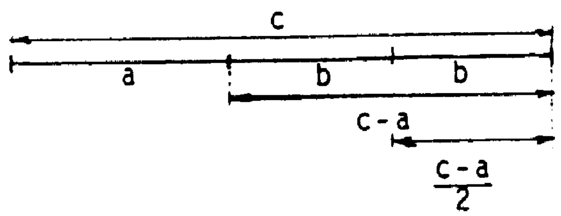
a) Begründe die Umformungen durch Umformungsregeln.

b) Veranschauliche die Umformungen in einer Zeichnung.

Lösung:

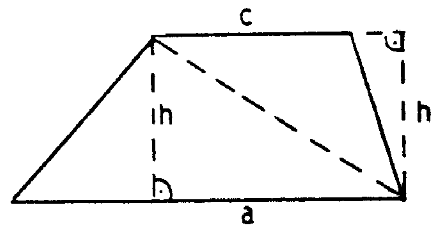
a)
$$\left.\begin{aligned} a+2.b &= c \\ 2.b &= c-a \end{aligned}\right] \text{--- } A+B = C \Leftrightarrow B = C-A$$
$$\left.\begin{aligned} 2.b &= c-a \\ b &= \frac{c-a}{2} \end{aligned}\right] \text{--- } A.B = C \Leftrightarrow A = \frac{C}{A}$$

b)



15 Leite aus der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks eine Formel für den Flächeninhalt des Trapezes her.

Lösung: $A = \frac{a.h}{2} + \frac{c.h}{2} = \frac{(a+c).h}{2}$

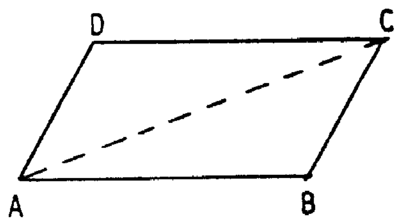


16 Beweise:

Ist $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$,

dann ist $\overline{AB} = \overline{DC}$ und $\overline{AD} = \overline{BC}$

(Argumentationsbasis:
Satz über Parallelwinkel, Kongruenzsätze)



17 Erkläre, wie man aus der Formel für den Flächeninhalt eines Kreises die Formel für den Flächeninhalt eines Kreissektors (Zentriwinkel α) erhält.

18 Durch welche Rechenregeln können die folgenden Umformungen begründet werden:

$(r+6).(r+2) =$

$= (r+6).r + (r+6).2 =$

$= (r.r+6.r) + (r.2+6.2) =$

$= (r^2+6.r) + (2.r+12) =$

$= ((r^2+6.r)+2.r) + 12 =$

$= (r^2+(6.r+2.r)) + 12 =$

$= (r^2+(6+2).r) + 12 =$

$= (r^2+8.r) + 12 =$

$= r^2+8.r+12$

Lösung:

$A.(B+C) = A.B+B.C$

$(A+B).C = A.C+B.C$

$A.A = A^2, \quad A.B = B.A, \quad 6.2 = 12$

$A+(B+C) = (A+B)+C$

$(A+B)+C = A+(B+C)$

$A.C+B.C = (A+B).C$

$6+2 = 8$

$(A+B)+C = A+B+C$

19 a) Sei $z \in \mathbb{R}$. Wie ist $|z|$ definiert?

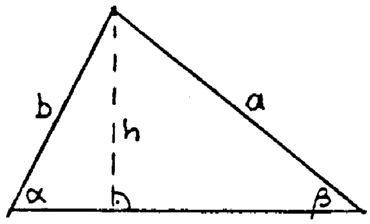
b) Es gelte $|z| \leq 7$. In welchem Intervall muß dann z sein?

c) Beweise diese Antwort mit der in a)gegebenen Definition.

20 (Voraussetzung: Kenntnis der Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck)

a) Drücke im nebenstehend gezeichneten Dreieck a durch α, β, b aus.

b) Folgere aus dieser Formel eine Beziehung zwischen a und b.

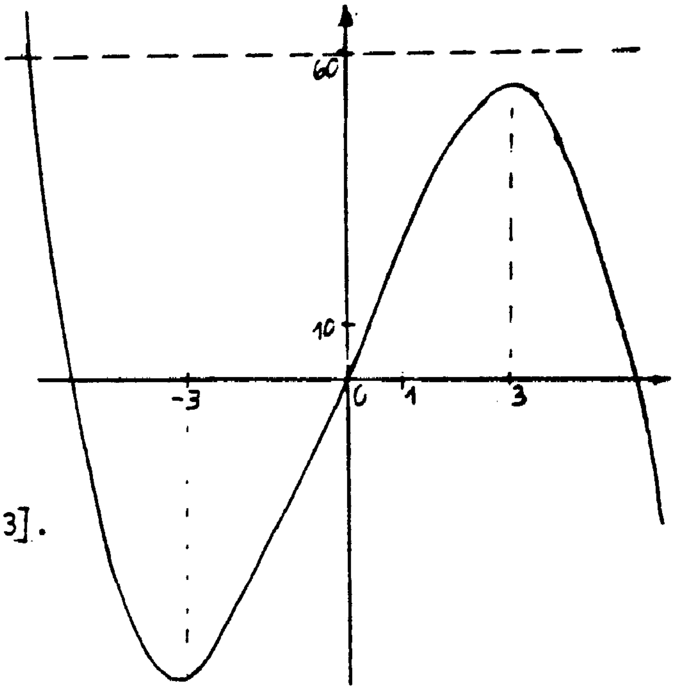


21 a) Ist die Funktion $f: x \to \frac{2}{x}$ streng monoton steigend oder streng monoton fallend in $\mathbb{R}^+$? Begründe die Antwort mit Hilfe der Definition der strengen Monotonie.

b) Beweise unter Verwendung der Definition des Grenzwertes einer Funktion, daß die Funktion f an der Stelle 2 stetig ist.

c) Wie ist der Differentialquotient an einer Stelle p definiert? Bestimme f'(2) aufgrund dieser Definition.

22 Beweise, daß die Gleichung $27x - x^3 = 60$ nicht mehr als eine Lösung hat.



Lösung:

$f(x) = 27x - x^3$

$f'(x) = 27 - 3x^2 = 3.(9-x^2)$

$f'(x) = 0 \iff x=3 \vee x=-3$

$f(3) = 54, \quad f(-3) = -54$

Für $x < -3$ ist $f'(x) < 0$, also
f streng monoton fallend in $]-\infty;-3]$.
Es gibt somit höchstens ein
$x \in]-\infty,3]$ mit $f(x) = 60$.

Für $-3 \leq x \leq 3$ ist $f'(x) > 0$,
also f streng monoton steigend in $[-3;3]$.
Daher gilt für alle $x \in [-3;3]$: $f(x) \leq f(3) = 54$.
Es gibt kein $x \in [-3;3]$, sodaß $f(x) = 60$

Für $x \geq 3$ ist $f'(x) < 0$, also f streng monoton fallend in $[3;\infty[$.
Daher gilt für alle $x \in [3;\infty[$: $f(x) \leq f(3) = 54$.
Es gibt kein $x \in [3;\infty[$, sodaß $f(x) = 60$.

23 Die Ableitung der Funktion $f: [-3;3] \in \mathbb{R}$ ist durch $f'(x) = (x+1).(x-2)^2$ gegeben. Der Graph von f enthält den Punkt (-2;6).

a) Zeichne den Graphen von f.

b) Berechne den größten und den kleinsten Wert von f und gib an, für welche $x \in [-3;3]$ die Beziehung $f(x) \geq f(2)$ gilt.

c) Begründe die Ergebnisse von b) durch das Monotonieverhalten von f.

24 a) Einer Halbkugel mit dem Radius $r = 6$ ist ein Zylinder so eingeschrieben, daß seine Grundfläche in der Ebene liegt, die die Halbkugel begrenzt. Wie lang müssen Radius und Höhe des Zylinders sein, damit sein Volumen möglichst groß wird?

b) Skizziere den Graphen der Funktion, die bei dieser Aufgabe untersucht wird. Begründe ausführlich (unter Verwendung des Zwischenwertsatzes und des Satzes von der Intervallmonotonie) die Vorgangsweise bei der Berechnung der Maximumstelle dieser Funktion.

Literatur:

Bürger, H.: Beweisen im Mathematikunterricht - Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In: Beweisen im Mathematikunterricht (Hrsg.: Dörfler, W. / Fischer, R.), S. 103 -134, Klagenfurt 1979.

Bürger, H.: Grundsätzliche Überlegungen zum Mathematikunterricht. In: Schulentwicklung, Heft 16 (Hrsg.: Leitner, L.), 1987.